RÉFLEXIONS

SUR LES DIVERSES MANIERES DONT ON PEUT REPRÉSENTER LE MOUVEMENT DE LA LUNE. (*)

PAR MR. L. EULER.

I.

Quelque exactes que ſoient les dernieres Tables aſtronomiques de la Lune, dont nous ſommes redevables aux ſoins de feu Mr. le Profeſſeur *Meyer* de Gottingue, il s'en faut beaucoup que la Théorie de ce Satellite de la Terre ſoit parfaitement approfondie. Toutes les équations que ce grand homme a employées pour déterminer le lieu de la Lune, ne renferment que d'heureuſes approximations pour atteindre à la vérité, qui en effet demanderoit un nombre infini de ſemblables équations; de ſorte que tout le mérite de ces Tables conſiſte en ce que les équations employées approchent déjà tant de la vérité, qu'on puiſſe négliger ſans une erreur ſenſible toutes les autres, quoique leur nombre ſoit infini. Il en eſt de même que des ſéries convergentes, dont un certain nombre de termes exprime déjà ſi exactement la véritable valeur de la ſérie, que tous les autres pris enſemble ne fourniroient qu'une ſi petite particule, qu'elle ne ſauroit être d'aucune conſéquence dans le calcul, où l'on ſe propoſe toujours un certain degré de préciſion, au delà duquel, dès qu'on y eſt arrivé, il ſeroit ſuperflu de vouloir pouſſer les approximations.

2. Comme il eſt preſque impoſſible de déterminer par les obſervations le lieu de la Lune plus exactement qu'à une minute près, Mr.

(*) Lû le 18 Déc. 1763.

Mr. *Meyer* s'eſt propoſé de porter ſes Tables de la Lune à ce même degré de préciſion, en ſorte que le lieu calculé de la Lune ne ſauroit s'écarter de la vérité au delà d'une minute, ce qui eſt ſans doute tout ce qu'on peut prétendre, attendu que les Tables pour les planetes principales ne ſont pas encore portées à un plus haut point de perfection. Pour l'état actuel où ſe trouve l'art d'obſerver, il ſeroit même inutile de pouſſer plus loin les Tables Aſtronomiques; & quand on ſeroit en état de calculer le lieu de la Lune à une ſeconde près, on n'en ſauroit retirer aucun avantage pour la pratique. Or un tel degré de préciſion demanderoit peut-être une centaine de nouvelles équations, qui fatigueroient ſans aucun fruit le travail & la patience des Calculateurs.

3. Il faut donc bien remarquer que les Tables de M. *Meyer* ne contiennent qu'une fort heureuſe approximation au vrai lieu de la Lune, que le mérite doit en être d'autant plus grand aux yeux des Aſtronomes, qu'auparavant les Tables s'écartoient ſouvent au delà de 5 minutes de la vérité, & qu'un plus haut degré de préciſion ne ſerviroit même à rien, tant que les Obſervateurs ne trouveront pas moyen de faire des obſervations beaucoup plus exactes. Ce n'eſt qu'à meſure qu'on fera de plus grands progrès dans la pratique des obſervations, qu'il conviendra de porter les Tables aſtronomiques à un plus haut degré de préciſion; or ſoit que l'eſpérance d'y arriver ſoit fondée ou non, il eſt toujours extrèmement important qu'on tâche de développer mieux la théorie du mouvement de la Lune, & de l'élever, s'il étoit poſſible, au plus haut point de perfection.

4. Le fameux probleme des trois corps, auquel il faut rapporter le mouvement de la Lune, ſurpaſſe encore trop les forces de l'Analyſe, pour qu'on puiſſe eſpérer d'en trouver une ſolution parfaite. Tout ce qu'il nous eſt permis d'y faire, ſe réduit à des méthodes d'approcher, ce qui ſe peut exécuter d'une infinité de manieres différentes, où toute l'adreſſe de l'Analyſte ſe déploye dans le choix des plus convenables. Cette entrepriſe renferme bien de l'arbitraire du côté de

l'Analyſe, comme il arrive dans toutes les autres approximations: on ſait par combien de méthodes différentes les Géometres ont approché du véritable rapport entre le diametre & la circonférence du cercle, & qu'il y en a qui en approchent beaucoup plus promtement que les autres, quoique toutes ſoient également bien fondées. Il en eſt de même du mouvement de la Lune, duquel on peut approcher par une infinité de méthodes différentes; c'eſt là-deſſus que je me propoſe de faire quelques refléxions, qui me ſemblent répandre beaucoup de lumiere ſur cette queſtion auſſi compliquée qu'importante.

5. Voici donc en général la méthode dont on ſe ſert pour repréſenter à peu près le mouvement de la Lune: d'abord on conçoit preſqu'une autre Lune, dont le mouvement ſeroit aiſé à déterminer, & qui ne différeroit que fort peu de celui de la vraie Lune, & alors on tâche de découvrir pour chaque tems propoſé la différence qui ſe trouve entre les lieux de cette Lune imaginaire & de la véritable. Il eſt clair que cette différence dépend de pluſieurs circonſtances auxquelles il faut avoir égard, & qu'elle doit être repréſentée par pluſieurs Tables d'équations dont le nombre ſera d'autant plus grand, qu'on voudra approcher de la vérité de plus près. C'eſt la même route qu'on a d'abord ſuivie pour connoitre le mouvement des planetes principales, où pour chacune d'elles on a introduit une autre planete imaginaire, dont le mouvement ſe feroit dans un cercle uniformement autour du Soleil; il eſt connu ſous le nom de mouvement moyen; & enſuite on a recherché les écarts de la véritable planete de ce mouvement moyen, d'où l'on eſt enfin parvenu à l'équation du centre, qui marque combien il faut ajouter au lieu moyen ou en ſouſtraire pour avoir le vrai lieu. Le grand *Kepler* a porté cette méthode au plus haut degré de perfection.

6. Pour la Lune, ce ſeroit commencer de trop loin que de vouloir ſuppoſer à la Lune imaginaire un mouvement circulaire & uniforme autour de la Terre: on profite plutôt d'abord des lumieres que la découverte de *Kepler* nous a fournies. Pour cet effet, on ſuppoſe à la

Lu-

Lune imaginaire un mouvement par une ellipſe, conformément aux regles de *Kepler*, & on donne à cette ellipſe une telle grandeur & excentricité, & encore un tel mouvement des abſides, que le mouvement de la Lune imaginaire s'écarte auſſi peu de celui de la véritable que l'irrégularité du mouvement le permet. Le grand *Newton* avoit déjà formé ce projet, & pour mieux approcher du but, il a non ſeulement ſuppoſé variable l'excentricité de l'orbite elliptique, mais il a auſſi mis certaines inégalités dans le mouvement des abſides. C'eſt ſur cette idée qu'on a publié autrefois en Angleterre pluſieurs Tables Lunaires, qui étoient bien mieux d'accord avec les obſervations que les précédentes, mais qui ne laiſſoient pas d'être encore très défectueuſes en s'écartant ſouvent preſque juſqu'à 10 minutes de la vérité; & il ſemble que, depuis cet heureux commencement du grand *Newton*, tous les efforts des Anglois ont été ſans ſuccès dans cette recherche.

7. Après pluſieurs recherches ſur cette matiere, j'avois publié dès l'an 1742 une nouvelle forme de Tables Lunaires, où pour la commodité du calcul j'ai ſuppoſé tant le mouvement des abſides uniforme, que l'excentricité de l'orbite invariable pour la Lune imaginaire, de ſorte que ſon lieu pût être calculé auſſi aiſément que celui des planetes principales: enſuite, j'y ai ajouté quelques Tables de corrections, qui, étant appliquées au lieu de la Lune imaginaire, donnaſſent le lieu de la Lune réelle. La Théorie m'avoit bien fourni toutes ces corrections, avec pluſieurs autres que j'ai omiſes à cauſe de leur petiteſſe; mais quelques élémens demandoient un grand nombre d'obſervations pour être bien déterminés, & comme ceux que j'avois employés pour ce deſſein n'étoient pas aſſez exacts, les Tables que j'avois conſtruites là-deſſus ne remplirent point mes vues, quoiqu'elles ne le cédaſſent en rien aux Angloiſes, & que leur application fût beaucoup plus aiſée.

8. Cependant, la forme même que j'avois donnée à mes Tables, trouva une approbation générale auprès de tous les Aſtronomes, qui jugerent qu'il ne falloit que mieux déterminer par les obſervations les élémens

mens numériques de ces Tables, pour porter cet important article de l'Aſtronomie à ſa plus grande perfection. Mr. *Meyer*, après avoir ramaſſé un grand nombre des meilleures obſervations, a heureuſement rempli cette tâche, & rectifié toutes les équations que j'avois employées pour déterminer le lieu de la Lune: & ce ſont les mêmes Tables qui ont été reçues avec le plus grand applaudiſſement tant en France qu'en Angleterre, & dont on ſe ſert généralement dans le calcul des Eclipſes, & partout ailleurs où il s'agit d'une détermination du lieu de la Lune. Les Tables de M. *Clairaut* ſont auſſi conſtruites ſur le même pied, & quand elles ne répondent pas ſi bien au Ciel, la raiſon ne ſauroit en être attribuée qu'à quelques légeres circonſtances, dont il ne ſeroit pas difficile de tenir compte.

9. Ces Tables ſont donc fondées ſur la forme que j'avois propoſée autrefois, en introduiſant une Lune imaginaire, qui ſe mût ſelon les regles de *Kepler* dans une certaine ellipſe, dont l'un des foyers ſe trouvât dans le centre de la Terre, & dont l'axe eût un mouvement uniforme égal à celui de l'apogée de la Lune, de ſorte que tout revînt enſuite à déterminer la différence qui ſe trouve entre le lieu de cette Lune imaginaire & la véritable. Or il eſt clair que ces deux ſuppoſitions pour le mouvement de la Lune imaginaire ſont abſolument arbitraires, & qu'on lui pourroit, avec autant de raiſon, attribuer une ellipſe variable tant par rapport à l'axe qu'à l'excentricité, & mettre auſſi certaines inégalités dans le mouvement des abſides, pour rendre la différence entre les deux Lunes encore plus petite, ou même la faire évanouir entierement. Une telle ſuppoſition ſeroit ſans doute plus propre à repréſenter le vrai mouvement de la Lune, pour que le calcul ne devînt pas trop embaraſſant.

10. En effet, les ſuppoſitions que j'ai faites alors, ne ſemblent pas aſſez convenables à la nature de l'apogée de la Lune, attendu que la Lune imaginaire pourroit bien ſe trouver dans ſon apogée, ou périgée, tandis que la véritable en ſeroit conſidérablement éloignée, & que ſa diſtance à la Terre ne ſeroit, ni la plus grande, ni la plus petite.

Car

Car, quand la Lune imaginaire aura passé par son apogée, il se pourroit bien que les équations augmentassent encore pendant quelque tems la distance de la véritable à la Terre, de sorte qu'elle atteignît son apogée longtems après, ou avant. Quoique ce cas ne soit pas d'une grande importance, pourvu qu'on réussisse à déterminer exactement le vrai lieu de la Lune, il semble pourtant que, plus on mettra d'accord la Lune imaginaire avec la véritable, plus les Tables qui en seront construites, deviendront conformes à la nature, & peut-être seront-elles plus propres à porter la précision à un plus haut degré. Cette idée semble au moins mériter toute notre attention.

11. Elle m'avoit conduit autrefois à une autre méthode, par laquelle j'ai déterminé pour chaque moment la section conique dont le mouvement de la Lune fait partie, & par laquelle elle continueroit de se mouvoir conformément aux regles de *Kepler*, si la force perturbatrice du Soleil venoit à évanouir subitement. Par-là je suis parvenu à une orbite variable à tous égards: pour chaque instant il falloit premierement déterminer tant le grand axe de l'ellipse que son excentricité, ensuite la position des absides, ou le lieu de l'apogée, dont le mouvement devenoit d'autant plus irrégulier, que l'excentricité étoit plus petite; & enfin l'anomalie vraie, ou l'éloignement de l'apogée exigeoit quantité de corrections. Or, dans tout cela, je n'avois pas encore fait attention au mouvement en latitude, d'où le mouvement de la ligne des nœuds & l'inclinaison de l'orbite à l'écliptique sont aussi assujettis à des variations toutes particulieres. Mais, aussi à cet égard, j'ai exposé autre part les formules générales, qui renferment la détermination du mouvement conformément à cette méthode.

12. Cette singuliere méthode d'envisager le mouvement de la Lune, paroit d'abord fort propre à la pratique, & je ne doute pas qu'on ne puisse s'en servir avec succès attendu que l'excentricité moyenne est déjà assez considérable, au lieu que si elle étoit très petite, ces approximations ne sauroient encore avoir lieu, conduisant même à des séries divergentes. L'Analyse qui m'a conduit à ces formules ne

 paroit

paroit pas non plus aſſez naturelle, puiſqu'elle paſſe par des intégrations embarraſſantes, dont il faut pourtant enſuite délivrer le calcul: & ſurtout le rapport aux regles de *Kepler*, qu'on y introduit d'abord ſans aucune néceſſité, ne ſemble pas aſſez propre à faciliter le calcul, & met des bornes trop étroites aux ſecours de l'Analyſe. De là réſulte cette queſtion importante, s'il ne feroit pas poſſible de manier les équations fondamentales & différentielles du ſecond degré, que les principes de la Mécanique fourniſſent, enſorte qu'on en puiſſe dériver ſans tant d'embarras, non ſeulement les deux manieres d'approcher, dont je viens de parler, mais encore à la fois toutes les manieres poſſibles, dont le nombre eſt ſans doute infini, afin que pour chaque cas on en puiſſe choiſir celle qui ſera la plus convenable pour le calcul aſtronomique.

13. Après pluſieurs eſſais, je crois enfin avoir trouvé une ſolution fort aiſée de cette queſtion, qui peut être d'une grande utilité non ſeulement pour la Lune, mais auſſi pour tous les corps céleſtes, dont le mouvement eſt dérangé par l'action de quelques autres corps. Or je ferai ici abſtraction des dérangemens auxquels le mouvement en latitude pourroit être aſſujetti, puiſque ceux-ci ſont pour la plûpart aſſez faciles à déterminer, & que les autres n'en dépendent preſque point. On rencontre toujours les plus grandes difficultés dans la détermination des dérangemens qui troublent le ſeul mouvement en longitude; & dès qu'on y a une fois réuſſi, on n'eſt pas ordinairement fort embarraſſé par rapport aux inégalités dans le mouvement en latitude.

14. Poſant donc la diſtance de la Lune à la Terre $= v$, & ſa longitude $= \phi$, pour un tems écoulé $= t$, on ſait que prenant conſtant le différentiel du tems dt, le mouvement eſt déterminé par deux équations différentio-différentielles de cette forme

$$\text{I.} \quad 2dvd\phi + vdd\phi = Pdt^2$$

$$\text{II.} \quad ddv - vd\phi^2 + \frac{Adt^2}{vv} = Qdt^2,$$

où

où les lettres P & Q renferment les forces perturbatrices, de sorte que, si elles évanouissoient, le mouvement seroit régulier & conforme aux regles de *Kepler*. Et partant, pour d'autres corps célestes, il faut toujours rapporter le mouvement à un point, par rapport auquel il seroit à peu près régulier. C'est donc de la résolution de ces deux équations que dépend la connoissance des dérangemens principaux, auxquels tous les corps célestes sont assujettis, & pour chaque cas il est aisé de définir les valeurs des quantités P & Q.

15. Pour la premiere équation je fais dabord cete substitution $vv\,d\phi = s\,dt$, qui donnant

$$2v\,dv\,d\phi + vv\,dd\phi = ds\,dt$$

nous fournit $ds\,dt = Pv\,dt^2$, & partant $ds = Pv\,dt$, qui étant multipliée par la premiere $s\,dt = vv\,d\phi$, donne $s\,ds = Pv^3\,d\phi$, d'où nous connoissons le rapport des élémens dt & ds à $d\phi$, si l'on juge à propos de réduire tout à l'élément de longitude $d\phi$. De là on voit aussi que, si la quantité P évanouissoit, on auroit $ds = o$, & partant s constant; de sorte que les aires décrites $\frac{1}{2}\int vv\,d\phi$ seroient proportionnelles au tems t, conformément à la premiere regle de *Kepler*.

16. Pour la seconde équation, je fais la supposition $\frac{dv}{vv} = r\,d\phi$, ou bien $d.\frac{1}{v} = -r\,d\phi$; & puisque $dv = rvv\,d\phi$, nous aurons $dv = rs\,dt$, & partant $ddv = dt\,d.rs$, & $v\,d\phi^2 = \frac{ss\,dt^2}{v^3} = \frac{s\,dt\,d\phi}{v}$, d'où la seconde équation prend cette forme

$$d.rs - \frac{s\,d\phi}{v} + \frac{A\,dt}{vv} = Q\,dt$$

qui, substituant pour dt sa valeur $\frac{vv\,d\phi}{s}$, se change en celle-ci

$$r\,ds + s\,dr - \frac{s\,d\phi}{v} + \frac{A\,d\phi}{s} = \frac{Qvv\,d\phi}{s}$$

&

& puiſque $ds = \frac{Pv^3 d\phi}{s}$, nous en tirons

$$dr = d\phi\left(\frac{1}{v} - \frac{A}{ss} - \frac{Pv^3r}{ss} + \frac{Qvv}{ss}\right)$$

où il faut bien ſe ſouvenir que, dans le mouvement régulier, s feroit une quantité conſtante.

17. Maintenant, puiſqu'il convient de conſidérer dans le calcul le réciproque de la diſtance $\frac{1}{v}$ plutôt qu'elle-même, je ſuppoſe $\frac{1}{v} = \frac{A}{ss} + \frac{q}{ss}$ ou $v = \frac{ss}{A + q}$ pour avoir $dr = \frac{d\phi}{ss}\left(q - Pv^3r + Qvv\right)$. Or enſuite ayant $\frac{dv}{vv} = \frac{2Ads}{s^3} + \frac{2qds}{s^3} - \frac{dq}{ss} = rd\phi$, il s'enſuit

$$dq = \frac{2(A+q)ds}{s} - rssd\phi, \quad \text{ou bien}$$

$$dq = -rssd\phi + \frac{2(A+q)Pv^3d\phi}{ss}.$$

De là on connoit pour chaque inſtant pendant lequel la longitude ϕ croît de ſon élément $d\phi$, les incrémens des quantités s, r & q, d'où, ſi on les pouvoit déterminer elles-mêmes, on auroit tout de ſuite la diſtance $v = \frac{ss}{A + q}$ & le tems $t = \int \frac{vvd\phi}{s}$, d'où il faudroit enſuite réciproquement conclure la longitude ϕ.

18. On peut rendre cette derniere ſubſtitution plus commode en poſant $\frac{1}{v} = p + q$, ou bien $v = \frac{1}{p+q}$, de ſorte que

$$dr = d\phi\left(p + q - \frac{A}{ss} - \frac{Pv^3r}{ss} + \frac{Qvv}{ss}\right).$$

Pre-

Prenons maintenant s en ſorte que $p = \frac{A}{ss}$ ou $ss = \frac{A}{p}$, donc $s\,\mathrm{d}s = -\frac{A\,\mathrm{d}p}{2pp}$. De là nous tirons les déterminations ſuivantes:

1°. $\mathrm{d}t = \frac{vv\,\mathrm{d}\Phi\sqrt{p}}{\sqrt{A}} = \frac{\mathrm{d}\Phi\sqrt{p}}{(p+q)^2\sqrt{A}}$,

2°. $\mathrm{d}p = \frac{-2Pv^3pp\,\mathrm{d}\Phi}{A}$

3°. $\mathrm{d}v = vvr\,\mathrm{d}\Phi$ ou $\mathrm{d}q = -r\,\mathrm{d}\Phi + \frac{2Pv^3pp\,\mathrm{d}\Phi}{A}$

4°. $\mathrm{d}r = q\,\mathrm{d}\Phi - \frac{Pv^3pr\,\mathrm{d}\Phi}{A} + \frac{Qvvp\,\mathrm{d}\Phi}{A}$.

Donc, ſi les forces perturbatrices P & Q évanouiſſent, on aura $p = b$; $q = c\cos(\Phi+\alpha)$; $r = c\sin(\Phi+\alpha)$; $v = \frac{1}{b + c\cos(\Phi+\alpha)}$ & $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\Phi\sqrt{b}}{(b + c\cos(\Phi+\alpha))^2\sqrt{A}}$, d'où l'on tire le mouvement dans une ſection conique conformément aux regles de *Kepler*.

19. On voit bien qu'on peut varier à l'infini cette ſubſtitution: la plus propre pour l'uſage aſtronomique eſt celle-ci: $v = \frac{p}{1+q}$ ou $\frac{1}{v} = \frac{1}{p} + \frac{q}{p}$, de ſorte que

$$\frac{\mathrm{d}v}{vv} = \frac{(1+q)\,\mathrm{d}p}{pp} - \frac{\mathrm{d}q}{p} = r\,\mathrm{d}\Phi, \quad \text{\& partant}$$

$$\mathrm{d}q = \frac{(1+q)\,\mathrm{d}p}{p} - pr\,\mathrm{d}\Phi.$$

 Or

Or ayant $dr = d\phi\left(\frac{1}{p} + \frac{q}{p} - \frac{A}{ss} - \frac{Pv^3r + Qvv}{ss}\right)$,

prenons $\frac{A}{ss} = \frac{1}{p}$, ou $ss = Ap$; donc $sds = \frac{1}{2}Adp = Pv^3d\phi$; de là tous les élémens ſe rapporteront ainſi à celui de longitude $d\phi$, poſant $v = \frac{p}{1+q}$,

1°. $dt = \frac{vvd\phi}{\sqrt{Ap}} = \frac{pd\phi\sqrt{p}}{(1+q)^2\sqrt{A}}$

2°. $dp = \frac{2Pv^3d\phi}{A}$

3°. $dq = -prd\phi + \frac{2Pv^3(1+q)d\phi}{Ap}$ & $dv = vvrd\phi$

4°. $dr = \frac{qd\phi}{p} - \frac{Pv^3rd\phi}{Ap} + \frac{Qvvd\phi}{Ap}$,

où, pour le cas des forces perturbatrices évanouiſſantes, on a $p = b$, $q = c\cos(\phi + \alpha)$, $r = \frac{c\sin(\phi+\alpha)}{b}$, donc

$$v = \frac{b}{1 + c\cos(\phi+\alpha)}, \quad \& \quad dt = \frac{bd\phi\sqrt{b}}{(1+c\cos(\phi+\alpha))^2\sqrt{A}}$$

où b eſt le demi-parametre de l'orbite, $\phi + \alpha$ l'anomalie vraie, & c l'excentricité de l'orbite.

20. Cette Analyſe nous conduit dabord à l'hypotheſe de l'orbite variable à tous égards, dont j'ai parlé ci-deſſus. Car ſoit, pour l'inſtant préſent, p le demi-parametre de l'orbite, u ſon excentricité, & ω l'anomalie vraie de la Lune, & on n'a qu'à mettre $q = -u\cos\omega$, & $r = \frac{-u\sin\omega}{p}$, ou $pr = -u\sin\omega$, afin que le différentiel de

la

la diſtance $dv = \frac{-vvud\Phi \sin\omega}{p}$ évanouiſſe, tant lorſque $\omega = o$, que lorſque $\omega = 180^\circ$. Ayant donc $dq = -du \cos\omega + ud\omega \sin\omega$, & $d.pr = pdr + rdp = -du \sin\omega - ud\omega \cos\omega$, la combinaiſon de ces deux équations fournit

$$du = -dq \cos\omega - pdr \sin\omega - rdp \sin\omega$$
$$ud\omega = dq \sin\omega - pdr \cos\omega - rdp \cos\omega.$$

Or $pdr + rdp = qd\Phi + \frac{Pv^3rd\Phi + Qvvd\Phi}{A}$ ou

$$pdr + rdp = -ud\Phi\cos\omega - \frac{Pv^3ud\Phi\sin\omega}{Ap} + \frac{Qvvd\Phi}{A} =$$
$$-ud\Phi\cos\omega - \frac{Pvvud\Phi\sin\omega}{A(1+u\cos\omega)} + \frac{Qvvd\Phi}{A}$$

& $dq = ud\Phi\sin\omega + \frac{2Pvvd\Phi}{A}$ à cauſe de $v = \frac{p}{1+u\cos\omega}$.

Donc tous les élémens ſeront déterminés de cette ſorte

1°. $dt = \frac{vvd\Phi}{\sqrt{Ap}} = \frac{pd\Phi\sqrt{p}}{(1-u\cos\omega)^2\sqrt{A}}$

2°. $dp = \frac{2Pv^3d\Phi}{A} = \frac{vv\,d\Phi}{A} \cdot \frac{2Pp}{(1-u\cos\omega)}$

3°. $du = \frac{vv\,d\Phi}{A}\left(\frac{P(u - 2\cos\omega + u\cos\omega^2)}{1-u\cos\omega} - Q\sin\omega\right)$

4°. $ud\omega = ud\Phi + \frac{vv\,d\Phi}{A}\left(\frac{P(2-u\cos\omega)\sin\omega}{1-u\cos\omega} - Q\cos\omega\right)$

où l'on a $dv = \frac{-vvud\Phi\sin\omega}{p}$, ou $d.\frac{1}{v} = \frac{u}{p}d\Phi\sin\omega$.

21. Sachant le rapport de tous les élémens entr'eux, on peut aussi les réduire tous à celui du tems dt, au lieu duquel on peut aisément introduire le mouvement moyen du Soleil. Donc, puisque $vv\,d\Phi = dt\sqrt{Ap}$, les élémens du mouvement seront déterminés ainsi

1°. $dp = \frac{dt\sqrt{p}}{\sqrt{A}} \cdot \frac{2Pp}{1-u\cos\omega}$, pour la variation du parametre

2°. $du = \frac{dt\sqrt{p}}{\sqrt{A}}\left(\frac{P(u - 2\cos\omega + u\cos\omega^2)}{1 - u\cos\omega} - Q\sin\omega\right)$

pour la variation de l'excentricité

3°. $d\omega = d\Phi + \frac{dt\sqrt{p}}{u\sqrt{A}}\left(\frac{P(2 - u\cos\omega)\sin\omega}{1 - u\cos\omega} - Q\cos\omega\right)$

pour la variation de l'anomalie vraie ω;

où il faut remarquer que $\Phi - \omega$ exprime la longitude de l'apogée. Ensuite, ayant $v = \frac{p}{1 - u\cos\omega}$, la longitude de la Lune Φ doit être tirée de cette équation $dt\sqrt{A} = \frac{p\,d\Phi\sqrt{p}}{(1 - u\cos\omega)^2}$ & la variation de la distance v est connue immédiatement par cette formule $dv = \frac{-u\,dt\sin\omega\,.\,\sqrt{A}}{\sqrt{p}}$.

22. Voilà donc une Analyse fort aisée, qui nous a conduits aux mêmes formules que j'avois trouvées autrefois par une méthode fort embarrassée qui passoit par des intégrations & par la résolution d'une formule irrationelle quarrée, qu'il falloit rendre rationelle. Ces formules nous découvrirent pour chaque instant la grandeur, l'espece & la position de la section conique, dans laquelle la Lune ou tout autre corps céleste continueroit à se mouvoir, si les forces perturbatrices évanouissoient subitement. Or, quelque naturelle que paroisse cette méthode, elle a, comme j'ai déjà remarqué, cet inconvénient, qu'elle ne sauroit avoir

avoir lieu dans les cas où l'excentricité u eſt très petite, puiſqu'alors le mouvement de l'apogée ou la valeur de l'angle ω ſeroit aſſujettie à de trop grandes inégalités à cauſe des parties diviſées par u. Mais, pour la Lune, où l'excentricité eſt aſſez conſidérable, je crois qu'il ne ſeroit pas inutile d'y appliquer ces formules & d'y conſtruire des Tables.

23. Après avoir déduit cette méthode d'enviſager les dérangemens des corps céleſtes, des formules générales du §. 19, je remarque que ces mêmes formules nous fourniſſent auſſi la premiere méthode dont je me ſuis ſervi pour conſtruire mes premieres Tables Lunaires, & que feu M. *Meyer* a ſuivie enſuite avec tant de ſuccès. Pour y arriver, on n'a qu'à ſuppoſer l'excentricité conſtante, qui ſoit $= e$, & poſer $q = -e\,\mathrm{cof}\,\omega$, de ſorte que ω exprime ce qu'on nomme l'anomalie vraie. De là nous aurons d'abord la diſtance $v = \frac{p}{1 - e\,\mathrm{cof}\,\omega}$, & partant $\mathrm{d}t\sqrt{A} = \frac{p\,\mathrm{d}\Phi\sqrt{p}}{(1 - e\,\mathrm{cof}\,\omega)^2}$; donc $\mathrm{d}v = vvr\,\mathrm{d}\Phi = r\,\mathrm{d}t\sqrt{Ap}$, où la valeur de r ſera déterminée par les formules ſuivantes

$$\mathrm{d}p = \frac{2Pv^3\mathrm{d}\Phi}{A} = \frac{\mathrm{d}t\sqrt{p}}{\sqrt{A}} \cdot \frac{2Pp}{1 - e\,\mathrm{cof}\,\omega}$$

$$\mathrm{d}r = \frac{-e\,\mathrm{d}\Phi\,\mathrm{cof}\,\omega}{p} - \frac{vv\,\mathrm{d}\Phi}{Ap}\left(\frac{Ppr}{1 - e\,\mathrm{cof}\,\omega} - Q\right).$$

$$e\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{fin}\,\omega = -pr\,\mathrm{d}\Phi + \frac{vv\,\mathrm{d}\Phi}{A} \cdot 2P.$$

Mais ici on voit bien, qu'à moins que la quantité $\frac{2Pvv}{A} - pr$ ne devienne diviſible par $e\,\mathrm{fin}\,\omega$, l'anomalie vraie ω en obtient un mouvement très irrégulier: de ſorte que cette méthode eſt auſſi aſſujettie à de grands inconvéniens.